

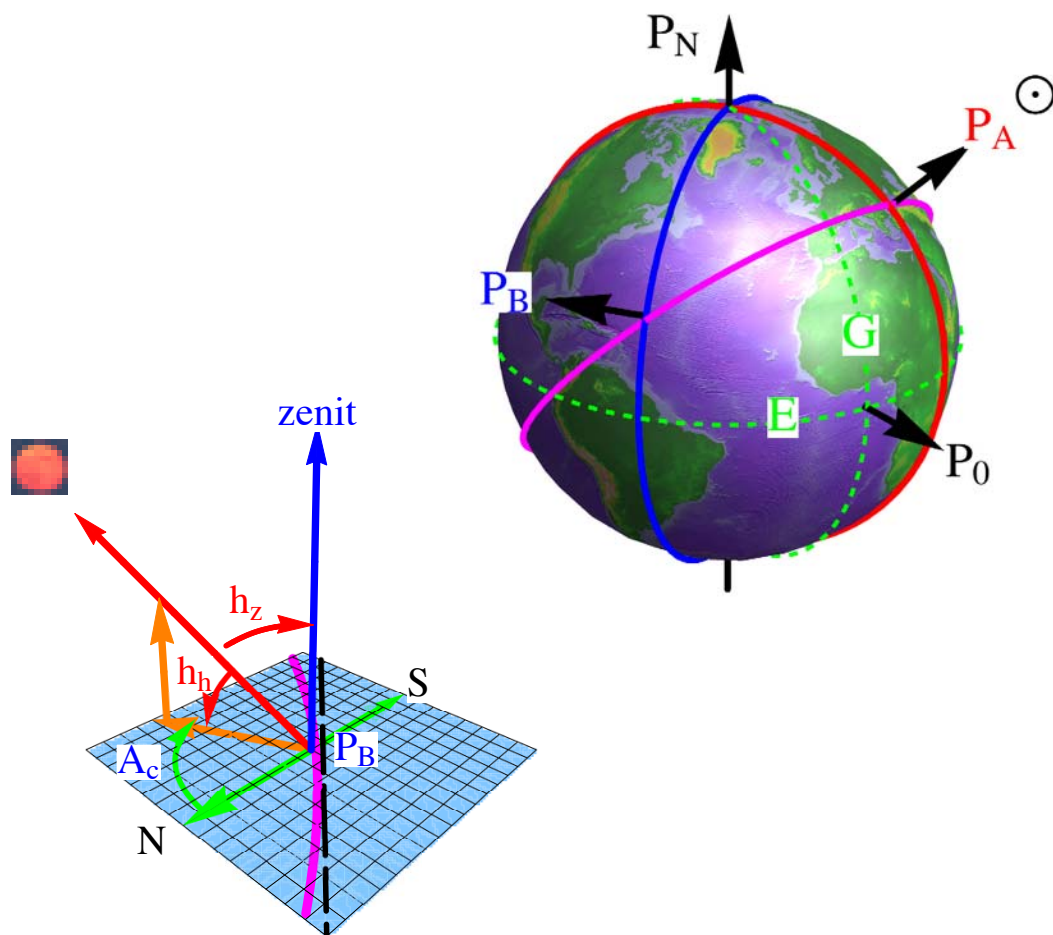
---

# Navegando con las Estrellas

Posicionamiento Geográfico y  
Reconocimiento de Astros

---

Pedro de Andrés





Copyright ©2014 Pedro de Andres.

Comentarios, sugerencias y correcciones a ...

pedrodeandres57@gmail.com

Documento escrito y organizado usando  $\text{\LaTeX}$ . Las figuras se han realizado con Mathematica (©Mathematica is a registered trademark of Wolfram Research, Inc.). La imagen de la Tierra procede de un mapa de dominio publico proporcionado con permiso para su reproduccion por NOAA [NOAA(2007)]. Los datos astronomicos han sido calculados usando NavPac [Hohenkerk and Yallop(2010)].

1.<sup>a</sup> edicion (Madrid, 2014).

ISBN 978-84-617-0418-7



9 788461 704187

Dedicado a la gente de la mar,



Veles e Vents han mos Desigs complir,  
faent camins dubtosos per la mar.  
Mestre i Ponent contra d'ells veig armar;  
Xaloc, Llevant, los deuen subvenir  
ab llurs amics lo Grec e lo Migjorn,  
fent humils precs al vent Tramuntanal  
que en son bufar los sia parcial  
e que tots cinc complesquen mon retorn.

Ausias March, Valencia (1397-1459).

Velas y Vientos deberan mis Deseos cumplir,  
haciendo caminos dudosos por la mar.  
Maestral y Poniente contra ellos veo luchar;  
Jaloque, Levante, los tienen que amainar  
con sus amigos el Gregal y el Mediodia,  
rogando humildemente al viento Tramuntanal  
que al soplar les sea parcial  
y que juntos los cinco ayuden a mi retorno.

## Agradecimientos

Al escribir este texto la ayuda de Rafael Ramirez ha sido fundamental. Sus comentarios y sugerencias han resultado muy útiles. Sin su apoyo, paciencia y comprensión este texto jamás habría sido posible. También le agradezco a Rosa sus numerosos comentarios y la ayuda con el diseño gráfico. Naturalmente, todos los errores u omisiones en el texto son enteramente responsabilidad del autor.

Mis profesores de Enseñanza Primaria y del Bachillerato han jugado un papel fundamental puesto que me han enseñado lo que he necesitado para organizar estas ideas. Mi agradecimiento a José Puertas, Daniel Gil, y a mi padre.

La motivación para escribir estas líneas surgió con ocasión del seminario de Navegación Astronómica organizado por la Armada Española en Madrid (2013). Mi agradecimiento a los profesores y organizadores de este excelente seminario, y a la Armada Española por proporcionar los medios para su realización.



# Índice general

<b>1. Introduccion.</b>	<b>1</b>
1.1. Enfoque. . . . .	1
1.2. Relevancia. . . . .	3
1.3. Matematicas basicas. . . . .	4
1.4. Latitud en un par de minutos. . . . .	6
1.5. Longitud en un par de minutos. . . . .	9
1.6. Discusion. . . . .	11
1.7. Organizacion e Itinerarios. . . . .	13
<b>2. Geometria.☉☉☉</b>	<b>21</b>
2.1. Elementos de la Esfera. . . . .	22
2.2. Posicion Geografica. . . . .	25
2.2.1. Angulos Polares y Ecuatoriales. . . . .	30
2.2.2. Declinacion y Horario. . . . .	32
2.3. Altura y Acimut. . . . .	33
2.4. Paralaje. . . . .	34
2.5. Triangulo de Posicion. . . . .	35
2.6. Trigonometria Esferica. . . . .	42
<b>3. Horarios y Declinacion. ☉☉☉</b>	<b>45</b>
3.1. Declinacion ( $\delta$ ). . . . .	45
3.2. Horario ( $H$ ). . . . .	46
3.2.1. Horario en Greenwich, $H_G$ . . . . .	48
3.2.2. Horario Local, $H_L$ . . . . .	51
3.2.3. Horario Sidereo, $H_S$ . . . . .	52
3.3. Ejemplo: Horario local. . . . .	54
3.4. El Tiempo. . . . .	55
3.4.1. La Hora del Buque. . . . .	56
3.4.2. La Hora del Astronomo. . . . .	57
3.4.3. Significado de las $0^h$ y las $12^h$ . . . . .	59
3.4.4. Hora Local. . . . .	60
3.4.5. Hora Oficial. . . . .	60
3.5. Otros estandares para el tiempo. . . . .	61

3.6.	Aries. . . . .	62
3.7.	Las Estrellas. . . . .	66
3.8.	El Sol. . . . .	67
3.9.	La Luna y los Planetas. . . . .	69
<b>4.</b>	<b>Posicionamiento e Identificacion. ☉☉☉</b>	<b>71</b>
4.1.	Identificar un astro desconocido. . . . .	71
4.1.1.	Ejemplo. . . . .	76
4.2.	Observar un astro conocido. . . . .	77
4.2.1.	Ejemplo. . . . .	81
4.3.	Obtencion Directa de la Posicion. . . . .	82
4.3.1.	Ejemplo. . . . .	84
4.4.	Estimacion de las Incertidumbres (***). . . . .	86
4.5.	Ortodromica. . . . .	87
<b>5.</b>	<b>Rectas de Altura Constante.☉☉☉</b>	<b>89</b>
5.1.	Circunferencias de Altura Constante. . . . .	90
5.2.	Rectas de Altura: Metodo Grafico. . . . .	95
5.2.1.	Dibujar una Recta de Altura. . . . .	97
5.2.2.	Corregir una Recta de Altura. . . . .	98
5.2.3.	Posicion por dos Rectas de Altura. . . . .	99
5.2.4.	Situacion sobre la Carta. . . . .	99
5.3.	Ejemplo: dos Rectas de Altura. . . . .	100
<b>6.</b>	<b>Casos Particulares.☉☉☉</b>	<b>105</b>
6.1.	Transito Meridiano, $H_L = 0^\circ$ . . . . .	105
6.1.1.	Astro en el Zenit ( $h_h = 90^\circ$ ). . . . .	106
6.2.	Estrellas circumpolares, $\delta \approx 90^\circ$ . . . . .	109
6.2.1.	Acimut de la estrella. . . . .	109
6.2.2.	Latitud del Buque. . . . .	110
6.3.	Crepusculos ( $h_h \approx 0^\circ$ ). . . . .	114
6.3.1.	Hora UT del crepusculo y de la meridiana. (***) .	115
6.3.2.	Astro en el crepusculo. . . . .	118
<b>7.</b>	<b>Corrigiendo la Altura del Sextante.☉☉☉</b>	<b>121</b>
7.1.	Indice del Sextante, $\Delta I$ . . . . .	125
7.2.	Linea del horizonte, $\Delta L_h$ . . . . .	126
7.3.	Refraccion en la atmosfera, $R$ . . . . .	128
7.4.	Tamaño y Paralaje. . . . .	130
7.4.1.	Tamaño. . . . .	130
7.4.2.	Paralaje. . . . .	131
7.5.	El Sol. . . . .	131
7.5.1.	Paralaje. . . . .	133
7.5.2.	Tamaño. . . . .	133



7.6.	La Luna. . . . .	133
7.6.1.	Paralaje. . . . .	133
7.6.2.	Tamaño. . . . .	134
7.6.3.	Esferoide oblató. . . . .	135
7.7.	Venus y Marte. . . . .	135
7.8.	Altura Final Corregida. . . . .	136
7.9.	Ejemplo. . . . .	136
<b>8.</b>	<b>Rectas de Altura Constante (II).</b>	<b>139</b>
8.1.	Ejemplo (I). . . . .	139
8.2.	Incertidumbre.*** . . . . .	144
8.3.	Método numérico.*** . . . . .	145
8.4.	Cinematica. . . . .	146
8.5.	Ejemplo (II). . . . .	147
8.6.	Ejemplo (III). . . . .	149
<b>A.</b>	<b>Glosario de Términos y Datos.☉☉</b>	<b>151</b>
<b>B.</b>	<b>Conceptos Matemáticos.☉</b>	<b>159</b>
B.1.	Ángulos. . . . .	159
B.1.1.	Unidades Angulares. . . . .	161
B.1.2.	Ángulos Positivos y Negativos. . . . .	163
B.1.3.	Ángulos complementarios, suplementarios y conjugados. . . . .	163
B.2.	Trigonometría. . . . .	164
B.2.1.	Coseno del Ángulo ( $\cos A$ ). . . . .	168
B.2.2.	Cuadrantes. . . . .	172
B.3.	Ecuación de primer grado. . . . .	174
B.4.	Ecuación de segundo grado. . . . .	174
B.5.	Álgebra. . . . .	175
B.6.	Triángulos esféricos. . . . .	176
B.6.1.	Las leyes útiles. . . . .	176
B.6.2.	Deducción de la Ley de los Cosenos (***) . . . . .	177
B.6.3.	Deducción de la Ley de los Senos (***) . . . . .	179
B.6.4.	Esférico vs. Plano. . . . .	180
<b>C.</b>	<b>Mapa Conforme.☉☉</b>	<b>181</b>
C.1.	Carta Vacía (local). . . . .	181
C.2.	Carta Mercator (global, ***). . . . .	186
<b>D.</b>	<b>Tablas de datos astronómicos.☉</b>	<b>191</b>
D.1.	Interpolación. . . . .	191
D.2.	Almanaque Náutico (ROA). . . . .	192
D.2.1.	Tabla 1: Sol, Luna, Aries y Planetas. . . . .	192

D.2.2. Tabla 2: las estrellas. . . . .	193
D.2.3. Tablas B, C y L: Refraccion, Paralaje y Semi-Diametro. . . . .	193
D.3. Almanaque Nautico (UK-USA). . . . .	193
D.4. Almanaque Compacto (UK). NavPac. . . . .	194
<b>E. Miscellanea.</b>	<b>197</b>
E.1. Nonius. . . . .	197
E.2. Mejor posicion respecto de varias Rectas. ** . . . . .	198
E.3. Estimacion de Errores. . . . .	200
E.4. Propagacion de Errores (***) . . . . .	203
E.5. Propagacion de rayos de Luz. . . . .	207
E.5.1. Reflexion. . . . .	208
E.5.2. Refraccion. . . . .	208
E.6. Sistemas de Coordenadas. . . . .	213
E.6.1. Sistema del Observador. . . . .	213
E.6.2. Sistema Geocentrico. . . . .	214
E.6.3. Sistema Heliocentrico. . . . .	214
E.7. El Sistema Solar. . . . .	215
E.7.1. Leyes de Kepler. . . . .	216
E.7.2. Horario de los Planetas. . . . .	219
E.7.3. Leyes de Newton. . . . .	224
E.8. Dias entre dos Fechas. . . . .	226
<b>F. Historia.</b>	<b>227</b>
F.1. De los Griegos a los Arabes. . . . .	234
F.2. La Peninsula Iberica. . . . .	238
F.3. La Ilustracion. . . . .	242
<b>G. Material Adicional.</b>	<b>247</b>
<b>H. Figuras y diagramas en color.</b>	<b>263</b>

# Capítulo 1

## Introduccion.

### 1.1. Enfoque.

Este texto explica como obtener la posicion de un observador sobre la esfera terrestre usando (i) un reloj que lleva la **hora** universal (UT), y (ii) medidas del **acimut**<sup>1</sup> y de la **altura angular** sobre el horizonte de un astro, o medidas de la altura para al menos dos astros.<sup>2</sup> El metodo para obtener la posicion de un observador depende de la resolucion de un **triangulo** sobre la superficie terrestre: conociendo valores para tres de sus elementos (angulos o lados) calcularemos los otros elementos, determinando las coordenadas (latitud y longitud) del observador.<sup>3</sup> Tambien consideraremos el problema inverso: conociendo la posicion de un observador determinar la latitud y longitud de un astro con la intencion de identificarlo, o bien calcular su altura y acimut para saber en que direccion lo podemos observar. Este ultimo calculo forma parte del metodo de las **Rectas de Altura Constante**, y es por lo tanto un problema de gran importancia.<sup>4</sup> Finalmente, estudiaremos **condiciones particulares** que simplifican la obtencion de la posicion del observador: astro en la meridiana, crepusculos matutinos o vespertinos, el uso de

---

<sup>1</sup> **Del arabe** *assumūt*, que significa *la direccion*. En este contexto, la direccion respecto del Norte, medida como un rumbo nautico.

<sup>2</sup> Se usa la palabra astro para denominar un cuerpo celeste util para tareas de posicionamiento geografico, es decir basicamente estrellas de magnitud dos o menor que son facilmente visibles en el cielo, y el Sol, la Luna, o los cuatro planetas Venus, Marte, Jupiter y Saturno. Antes de que sea posible discutir su significado con cierto detalle es inevitable introducir terminos como *acimut*, *zenit*, *hora universal*, *altura de un astro respecto del plano del horizonte*, etc. La forma recomendada de resolver alguna duda en este momento es acudir al Glosario de Terminos que se incluye en el Apendice A.

<sup>3</sup> Este triangulo es llamado **triangulo de posicion**, y es el elemento fundamental en el trabajo de posicionamiento e identificacion.

<sup>4</sup> El metodo de las Rectas de Altura Constante, o Lineas de Posicion, es la forma mas completa y segura de determinar una posicion.

astros singulares como las estrellas circumpolares, o la situación más favorable posible: un astro en el zenit del observador.

Todos estos casos requieren siempre resolver el mismo triángulo sobre la superficie de la esfera, y para ello es necesario conocer dos leyes de la trigonometría esférica. Dependiendo de los datos conocidos, y de las incógnitas que se desean averiguar se plantean tres casos diferentes, cf. Secciones 4.1, 4.2, y 4.3, de los cuales los dos primeros formarían el corazón de los métodos que vamos a usar, y el tercero tiene un valor básicamente pedagógico, aunque no por ello deja de ser interesante.

El lenguaje matemático es claro, simple, poderoso y contundente. A veces añade un esfuerzo inicial porque implica una descripción abstracta del problema. Pero una vez superado ese esfuerzo permite entender como y porque hay que realizar una tarea. Entender es la puerta para no olvidar, y la clave para no cometer errores. Este texto no huye del lenguaje de las matemáticas porque lo considera una herramienta decisiva. Es por tanto conveniente tener una formación matemática básica, y poder manejar con soltura una calculadora de bolsillo. El lector debería reconocer una expresión del tipo  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ , y poder usar una calculadora científica para comprobarla, cf. Sección B.2. También es muy conveniente poder resolver una ecuación simple como  $2x + 1 = 1.732$  ( $x = -\frac{0.732}{2} = -0.366$ ), cf. Sección B.3. Es decir, el texto debería ser asequible para alguien que haya superado las matemáticas básicas del Bachillerato o de la Formación Profesional. En ningún caso se requiere haber sido un alumno aventajado en matemáticas.

En aras de la simplicidad y la claridad es a veces ventajoso separarse de la notación convencional y de los métodos tradicionales. El beneficio es grande y el coste pequeño. Algunos textos que tratan el tema de la navegación astronómica dan la sensación de estar basados en una mezcla heterogénea y abstrusa de ideas. En parte, se debe al esfuerzo de presentar la materia suponiendo que el lector no posee suficientes habilidades matemáticas. El desarrollo histórico de la materia ha creado confusión al introducir algunos elementos que más adelante se han demostrado poco racionales, pero que ya no se han podido abandonar. Es el caso de la latitud y la longitud, que serían más útiles definidas de otra manera. Introducir ángulos que llevan asociados una letra convierte en difícil operaciones aritméticas que pueden ser muy sencillas si solo se usan números, positivos o negativos.<sup>5</sup> El origen y el dominio de estos ángulos también está pobremente elegido. Substituir estas magnitudes por otras más adecuadas tiene múltiples ventajas, aunque sea preciso mantener siempre una conexión con los valores que aparecen en las cartas, almanaques náuticos, libros de texto, etc.

---

<sup>5</sup> Por ejemplo, las letras N, S, W, o E que comúnmente acompañan a la latitud y a la longitud.

La calculadora científica de mano no existia hace 50 años, y la mayoría de los textos que tratan este tema dependen demasiado del uso de tablas, o de procedimientos que fueron pensados para poder operar consultando mecanicamente unas tablas, sin entender los porqués de las operaciones. Todavía es posible encontrar procedimientos muy ingeniosos que permiten resolver estos problemas usando solo numeros positivos, con la intencion de aplicar logaritmos para realizar multiplicaciones y divisiones. Estas circunstancias estan superadas hoy en dia y permiten abordar las tecnicas de navegacion astronomica de una forma diferente. Un manejo racional de una calculadora permite simplificar enormemente la tarea.

## 1.2. Relevancia.

Encontrar la posicion de un buque utilizando astros en el cielo es una cuestion de **seguridad**. Asi ha sido reconocido historicamente desde el momento en que se comenzó a navegar lejos de la costa. El posicionamiento preciso en tierra firme tambien puede tener interes, e historicamente ha tenido importancia en dominios tan variados como la economia, la geografia, la religion, etc.

Hoy en dia las tecnicas de posicionamiento basadas en redes de satelites (p.ej. el *Global Positioning System*, GPS) representan el metodo mas preciso y simple para situar un buque. El GPS es la herramienta ideal en un buque pequeño, donde simplemente la falta de espacio, o la necesidad de estar en cubierta, hace dificil realizar calculos de navegacion astronomica. Sin embargo, el posicionamiento mediante la observacion de astros ofrece una ventaja fundamental: permite ser independiente de medios externos al buque cuyo funcionamiento escapa al control del usuario por la necesidad de recursos como satelites, electronica, baterias, etc. Los astros en el cielo se pueden utilizar con la mayor fiabilidad, y es posible que haya que recurrir a ellos cuando todo lo demas haya dejado de funcionar. En una emergencia podria ser forzoso utilizar las tecnicas de navegacion astronomica contando unicamente con papel, lapiz, y una regla de calculo o una calculadora de bolsillo. La aparicion del GPS se podria comparar a la introduccion de la calculadora de bolsillo: es un gran avance, pero no implica dejar de enseñar a sumar y multiplicar con papel y lapiz. Esta es la filosofia que aplica la marina de guerra estadounidense para la formacion de sus oficiales despues de la aparicion del GPS.[Chen(1998)]

Incluso sin contar con situaciones criticas, y disponiendo de un GPS, es util poseer una manera alternativa e independiente de resolver el problema de posicionamiento geografico. Caso de disponer de un ordenador portatil, una calculadora programable, o incluso un telefono inteligente, sera posible realizar las operaciones de una manera tan sencilla como operar un GPS,

o mas. El autor proporciona a demanda los codigos de los de programas que ha usado elaborando este texto. Es razonable descargar el trabajo de las operaciones mas pesadas y rutinarias en algun elemento electronico, pero no seria sensato ignorar como funciona internamente un aparato que desarrolla una tarea vital en un buque. Esta es la situacion normal con un GPS: si sospechamos que la posicion no es correcta no hay una forma sencilla de arreglarlo. No entender y no ser capaz de analizar con espiritu critico los datos que proporciona un elemento vital para la seguridad es comodo pero es una receta segura para cometer errores y finalmente para el desastre.

Quizas el ejemplo mas paradigmatico de navegacion astronomica de emergencia registrado en la historia es el caso de la expedicion al polo Sur liderada por Ernest Shackleton. En condiciones de vida o muerte navegaron en un bote salvavidas de aproximadamente 6 m de eslora 1300 km en mar abierto para llegar desde la isla del Elefante a las islas Georgias del Sur, que vistas desde la isla del Elefante definen un angulo de  $9^\circ$  del que no se puede desviar el rumbo, so pena de terminar en medio del Oceano Atlantico. Esta hazaña de la navegacion, lograda en condiciones muy desfavorables, solo fue posible gracias a la habilidad para situarse usando los astros en el cielo del capitán Frank Worsely.[Wikipedia(2014)]

Finalmente, pero no menos importante, esta el placer intelectual de entender, aunque sea solo parcialmente, como funciona el cielo, y las ventajas que podemos extraer de este conocimiento. Verdaderamente, las estrellas han fascinado desde muy antiguo al ser humano, y el deseo de entenderlas ha sido una de las fuerzas mas poderosas para crear la ciencia moderna, de la que todos nos beneficiamos cotidianamente.

### 1.3. Matematicas basicas.

Antes de comenzar, conviene que el lector pueda valorar como se va a sentir frente a las matematicas que vamos a usar. Para ello, vamos a comentar un ejemplo sencillo, y tambien algo sobre las operaciones mas comunes que querremos realizar. Una exposicion mas extensa y detallada se ofrece en el Apendice B.

Consideremos en primer lugar como obtener la longitud de una estrella dada una fecha y una hora del dia.<sup>6</sup> A esta cantidad se le conoce como el Horario en Greenwich de la estrella y normalmente se obtiene consultando una tabla de datos: un Almanaque Nautico. Para conseguir la precision requerida estas tablas listan un valor para cada hora del dia, para cada dia en un año determinado. Es decir, proporcionan una lista

---

<sup>6</sup> Es decir, la longitud de la posicion geografica de la estrella: la linea que une el centro de la Tierra con la estrella corta en un punto a la superficie de la Tierra; estamos interesados en la longitud de ese punto.

de  $24 \times 365 = 8760$  numeros, en la que hay que interpolar para obtener el valor correcto a una hora que normalmente se da con una precision de segundos.[ROA(2014)] Cada uno de estos 8760 numeros dice muy poco sobre el numero que lo precede, o el que lo sigue, y desde luego es imposible adivinar como se comporta la serie total a partir de la tabla. Estos numeros se dan para un grupo de aproximadamente cien estrellas que se consideran utiles en el trabajo de posicionamiento geografico.

La estrategia que pervive en este texto es diferente. En lugar de listas de numeros se favorece el uso de expresiones compactas. Por ejemplo:

$$H_G(d, t) = H_G(0) + \frac{360^\circ}{24} t + \frac{360^\circ}{365.25} \left( d + \frac{t}{24} \right) \quad (1.1)$$

Esta ecuación proporciona, para el dia  $d$  a la hora  $t$ , el Horario en Greenwich de una estrella,  $H_G$ . Consecuentemente es una alternativa sencilla a las listas de numeros que acabamos de mencionar.<sup>7</sup> Es una manera de referirnos a la longitud de la posicion geografica de la estrella. Mas adelante explicaremos este concepto con mas detalle y veremos la razon del nombre *Horario*.

El valor del Horario en Greenwich **depende** de la hora del dia,  $t$ , y del dia del año,  $d$ , y lo expresamos en grados sexagesimales porque equivale a la medida de un **angulo**. El **primer** termino de la ecuacion,  $H_G(0)$ , es un valor fijo, que es caracteristico de cada estrella y por lo tanto puede servir para identificarla.<sup>8</sup> El **segundo** sumando,  $\frac{360^\circ}{24} t = 15^\circ t$ , dice que la longitud de la estrella aumenta con la hora del dia, a razon de quince grados por cada hora. Es decir, describe el movimiento de rotacion de la Tierra alrededor de su eje puesto que corresponde a que el angulo Horario completa un giro completo, o  $360^\circ$ , en  $24^h$ . El **tercer** sumando dice que la longitud de la estrella aumenta a lo largo del año a razon de  $\frac{360^\circ}{365.25} = 0.986^\circ$  por dia. Es decir, aproximadamente un grado por dia, para regresar al mismo valor al cabo de  $365\frac{1}{4}$  dias, cuando la Tierra ocupa aproximadamente el mismo lugar en su orbita alrededor del Sol. Consecuentemente, describe el movimiento de traslacion de la Tierra en su orbita alrededor del Sol.

Esta ecuacion, al contrario que una lista de varios miles de numeros, nos permite **entender** como y porqué cambia la longitud de una estrella con la hora y con el dia: Las estrellas no se mueven, todo su movimiento aparente proviene del movimiento de la Tierra. Aunque es un hecho bien

<sup>7</sup> Usamos el símbolo  $H$  para Horario y el subindice  $G$  para Greenwich.

<sup>8</sup>Es el valor del Horario en Greenwich de esa estrella a la hora cero, el dia cero:  $H_G(0) = H_G(d = 0, t = 0)$ . Por ejemplo, si nos interesara Sirio, la estrella mas brillante del cielo, seria  $H_G(0) = 358.13^\circ$ , tomando como comienzo para contar los dias el 1 de Enero del 2014, y para contar las horas las  $24^h$  segun la hora universal de Greenwich. Mas adelante, en la Sección 3.2.1, volveremos sobre esta ecuación y discutiremos en detalle como determinar el valor inicial.

sabido, la Ecuacion (1.1) lo cuantifica de forma precisa separando las diferentes contribuciones. Es cierto que obliga a usar una calculadora, pero las listas de numeros en los Almanagues tambien implican el uso de la calculadora puesto que es imperativo interpolar.

Desde un punto de vista operativo es por lo tanto necesario para seguir el texto poder manejar una **calculadora cientifica** para calcular expresiones similares a:

$$\sin^2(45.23^\circ) = 0.504$$

o del estilo de:

$$\sqrt{1 + 2 \sin(60.381^\circ)} = 1.654$$

Se ha supuesto que se ha introducido el angulo en la calculadora en grados sexagesimales, en notacion decimal, un modo que normalmente en las calculadoras se designa con el codigo **DEG**.<sup>9</sup> Muchas calculadoras operan en un modo diferente llamado radianes, **RAD**. Este texto se ha escrito casi exclusivamente usando grados sexagesimales en notacion decimal. Consecuentemente es importante que el lector se asegure de los requisitos particulares de su calculadora para introducir angulos en grados sexagesimales, en una notacion decimal.<sup>10</sup>

#### 1.4. Latitud en un par de minutos.

Supongamos que la estrella **Polar** estuviera situada exactamente en la direccion del eje que va del polo Sur al polo Norte,  $P_N$  en la Figura (1.1).<sup>11</sup> En este caso determinar la latitud seria facilisimo: simplemente hay que medir la altura de la Polar respecto del horizonte,  $h_h$ , y este valor es la latitud deseada,  $L_t$ :

$$\boxed{L_t = h_h} \quad (1.2)$$

La explicación es como sigue, cf. Figura 1.1. Consideremos un buque,  $B$ , en el punto en que la direccion  $O-P_B$  cruza la superficie de la Tierra. Esta direccion es la de un radio de la esfera y determina una latitud  $L_t$ , que es el angulo que forma esta linea con la direccion  $P_M$  sobre el plano

<sup>9</sup> Por *degrees*, en ingles.

<sup>10</sup> El radian es la forma mas natural de medir angulos, aunque su uso no sea corriente en problemas de navegacion. Se define en el Apendice B.1, donde se revisan las formas mas populares de medir angulos.

<sup>11</sup> La Polar aparece en los catalogos de estrellas como **Polaris** y es una estrella de magnitud 2 facilmente visible para el ojo desnudo. Se encuentra mirando hacia el norte, a una altura respecto del horizonte equivalente a la latitud del observador, por las razones que se dan a continuacion. En el Hemisferio Sur en lugar de Polaris se usaria Polaris Australis (tambien llamada  $\sigma$ -octantis). Esta estrella es mas dificil de localizar por ser menos brillante (magnitud 5.4), y esta mas alejada del eje de los polos que Polaris. Pero el concepto es el mismo.





del Ecuador. Dado que nuestro interes en este momento es la latitud, posponemos el problema de la longitud hasta la siguiente seccion.

El observador mide la altura angular de la Polar respecto de la linea del horizonte,  $h_h$ . El plano del horizonte es perpendicular a la direccion de la plomada, es decir a la direccion de un radio de la esfera que pasa por la posicion del buque ( $P_B$ ). Consecuentemente, el angulo de la Polar respecto de la direccion del radio,  $h_z$ , cumple que

$$h_z + h_h = 90^\circ \quad (1.3)$$

cf. Figura 1.1, panel derecho. La direccion de  $P_B$  es importante y por lo tanto tiene un nombre: es la direccion del **zenit**.<sup>12</sup>

Asumamos por un momento que (i) la estrella Polar esta exactamente sobre la direccion del eje de los polos,  $P_N$ , y que (ii) se observa en la misma direccion desde cualquier punto sobre la superficie de la Tierra. Es decir, se encuentra tan lejos que su paralaje es cero.<sup>13</sup>

La direccion del eje de los polos,  $P_N$ , es perpendicular al plano del Ecuador,  $E$ , desde el que medimos la latitud,  $L_t$ , a lo largo de un círculo máximo que llamamos Meridiano.<sup>14</sup> Existen innumerables meridianos, pero hay dos que son especialmente interesantes: (i) el meridiano  $M$  que pasa por la posicion del observador, y (ii) un meridiano de referencia que sirve para fijar un origen común para todos los observadores sobre la esfera terrestre (es decir, el meridiano que pasa por el observatorio astronómico de Greenwich, que se ha etiquetado en la Figura 1.1 con una  $G$ ).

Por otra parte, la hipotesis de que la estrella no tiene paralaje implica que  $h_z$  es tambien el angulo que forma el radio  $P_B$  con  $P_N$  en el centro de la esfera  $O$ . Es decir, se cumple que (cf. Figura 1.1, panel izquierdo):

$$h_z + L_t = 90^\circ \quad (1.4)$$

Estos argumentos sencillos implican que la altura angular de la Polar respecto del zenit del observador,  $h_z$ , describe al mismo tiempo la posicion del observador sobre la Tierra y la altura de la estrella que mide el buque. Esto es todo lo que se necesita: una magnitud que relacione la posicion del astro con la posicion del observador.<sup>15</sup>

Comparando la Ecuacion (1.3) con la Ecuacion (1.4) se deduce que  $L_t = h_h$ , como se habia avanzado al comienzo de la seccion.

<sup>12</sup> **Del arabe** *samt ar-ra's*, mas tarde abreviado *samt*, que significa *la direccion de la cabeza*.

<sup>13</sup> El concepto de paralaje sera discutido en la Seccion 2.4, cf. Figura 2.4.

<sup>14</sup> La forma usual de medir la latitud.

<sup>15</sup> Se deduce que el angulo respecto del zenit,  $h_z$ , va a jugar un papel central en lo que sigue, y esta es la razon por la que se ha introducido un nombre particular para la direccion de la plomada en el punto del observador: **el zenit**.

Este procedimiento era conocido por los marinos portugueses en el s. XV, que usaban la brújula para determinar el rumbo respecto del Norte o acimut, y el astrolabio para medir la altura respecto del zenit de algunos astros importantes, como la estrella Polar o el Sol.

## 1.5. Longitud en un par de minutos.

Supongamos que el observador conoce la hora precisa,  $t_G$ , en que el Sol ha cruzado el meridiano de Greenwich,  $G$ , cf. Figura 1.2. Las tablas de datos astronómicos conocidas como *Almanaque Nautico*[ROA(2014)] proporcionan este valor para cada día del año, para un reloj sincronizado con la hora universal del reloj maestro del observatorio de Greenwich.<sup>16</sup>

La Tierra completa un giro alrededor de su eje en  $24^h$ . Consecuentemente, el Sol se mueve para un observador sobre la superficie de la Tierra con una velocidad angular constante aproximada de  $\frac{360^\circ}{24^h} = 15 \frac{^\circ}{h}$ .

Supongamos que un observador,  $P_B$ , se encuentra en un meridiano cualquiera,  $M$ , y observa el momento,  $t_M$ , en que el Sol se sitúa en la dirección Norte-Sur, es decir, cruza el meridiano, cf. Figura 1.2. A este fenómeno se le suele llamar tránsito meridiano.<sup>17</sup> El tránsito del Sol por el meridiano local del observador, a veces llamado simplemente **la meridiana**, se puede determinar por su acimut: es el momento en que el Sol está exactamente en **la dirección Norte-Sur** ( $A_c = 0^\circ$  si se sitúa al N, o  $180^\circ$  si se sitúa al S). Otra forma de determinar el cruce del Sol por el meridiano local es observar cuando **su altura es máxima**: el Sol va aumentando su altura sobre el horizonte por la mañana y va disminuyendo su altura por la tarde. Cuando el Sol alcanza su altura máxima se encuentra sobre el meridiano. El procedimiento de la altura es preferible porque la altura se mide con mejor precisión que el acimut, pero geoméricamente son procedimientos equivalentes.

Puesto que el Sol se ha movido con velocidad constante desde su paso por el meridiano de  $G$  hasta su paso por el meridiano  $M$ , la longitud de  $M$ , es decir la distancia desde  $M$  a  $G$  es simplemente la velocidad con que se mueve el Sol por el tiempo transcurrido:

$$L_n = 15(t_M - t_G)$$

que proporciona la longitud en grados sexagesimales si se miden los

<sup>16</sup> Lo que normalmente se conoce como hora universal, conocido por su acrónimo en inglés UT. En la Sección (3.4) volveremos sobre el significado de hora universal, que a efectos prácticos solo significa llevar a bordo un reloj sincronizado con esta hora.

<sup>17</sup> Se llama tránsito a la alineación de dos objetos respecto de un observador. El tránsito más corriente es el de un astro (primer objeto) sobre el meridiano del observador (segundo objeto).

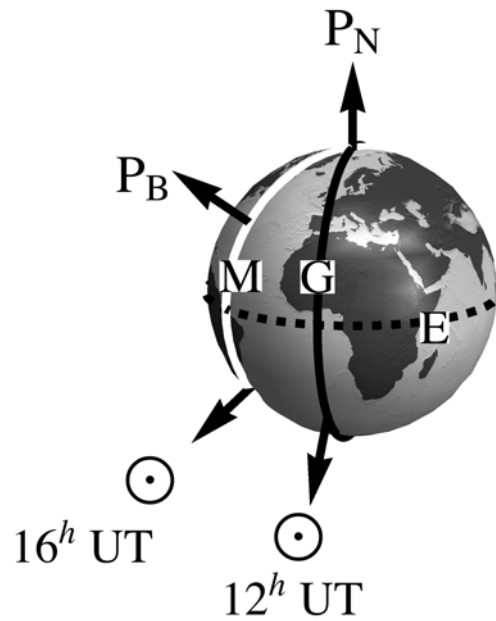


Figura 1.2: Longitud por la hora del Sol en el meridiano.  $P_B$ : zenit de un observador en un meridiano cualquiera,  $M$ ,  $G$ : meridiano de Greenwich.  $\odot(12^h \text{ UT})$ : Sol culminando sobre el meridiano de Greenwich a las  $12^h$  (UT).  $\odot(16^h \text{ UT})$ : Sol culminando sobre el meridiano  $M$  a las  $16^h$  (UT). Un buque en  $P_B$  observa el tránsito del Sol por su meridiano local  $M$  a las  $16^h 0^m$  (UT). Según el Almanaque Náutico, la hora del tránsito meridiano del Sol por Greenwich en esa fecha son las  $16^h 0^m$  (UT). Consecuentemente, longitud geográfica del buque será:  $L_n = (16 - 12)^h \times \frac{360^\circ}{24^h} = (16 - 12)^h \times 15^{\frac{\circ}{h}} = 60^\circ$  (W).

tiempos en horas.<sup>18</sup>

Por ejemplo, si el reloj sincronizado con la hora universal marca  $16^h0^m$  en el momento en que el Sol culmina sobre el meridiano  $M$ , y sabemos por el Almanaque Nautico que ese dia el transito meridiano del Sol en Greenwich ha ocurrido a las  $12^h0^m$  UT, inmediatamente sabemos que nos encontramos a una distancia del meridiano de Greenwich de  $4^h$ , y al W (el Sol ha pasado primero por Greenwich). Consecuentemente la longitud de  $M$  es  $(16 - 12) \times 15^\circ = \text{W } 60^\circ$ . Alternativamente, si el transito meridiano en  $M$  se produce a las  $06^h0^m$  UT, nos encontramos al este de Greenwich (el Sol todavia no ha culminado en  $G$ ), a una longitud de  $(12 - 6) \times 15^\circ = \text{E } 90^\circ$

Este metodo tan sencillo para medir la longitud se apoya en la rotacion de la Tierra alrededor de su eje, que es un fenómeno que ocurre con una velocidad que se puede considerar constante con gran precisión.<sup>19</sup>

Para determinar la longitud lo único necesario son unas tablas astronomicas y un reloj preciso sincronizado con la hora que se ha utilizado para generar estas tablas. Defendiendo este metodo fue como un relojero ingles (John Harrison, s. XVIII) arrebató a los mejores astrónomos de Europa el premio ofrecido por el Parlamento Ingles al primero capaz de determinar la longitud en condiciones reales de navegacion con una precisión mejor que 30 millas nauticas (mn), cf. Apendice F.<sup>20</sup> Harrison demostró que el metodo mas practico para determinar la longitud era construir un reloj preciso y fiable que pudiera transportar en un buque la hora que usaban los astrónomos del observatorio de Greenwich para elaborar las tablas de la hora de paso del Sol por el meridiano de Greenwich, cf. Ecuacion (3.9).

## 1.6. Discusion.

Estos dos metodos simples que acabamos de describir para determinar por separado la latitud y la longitud nos permiten establecer un esquema conceptual para entender el problema al que nos enfrentamos. Tambien demuestran que los conceptos que necesitamos son sencillos.

En la practica, sin embargo, es crucial poder determinar una posicion

<sup>18</sup> En realidad proporciona el angulo ecuatorial: mas adelante discutiremos como se relaciona la longitud y el angulo ecuatorial del observador.

<sup>19</sup> El período de rotación de la Tierra sobre su eje es de  $86400 \text{ (s)} = 24^h$ , define un dia solar, y corresponde aproximadamente a dos culminaciones sucesivas del Sol en el meridiano de Greenwich. El mismo valor medido respecto de una estrella lejana y aparentemente inmovil es de  $23.8^h$ , y define un dia sidereo; cf. Tabla A.1.

<sup>20</sup> La Oficina Internacional de Pesos y Medidas, en la 8 ed. del Sistema Internacional de Unidades (2006) define una **milla nautica** como aproximadamente un minuto de grado ( $1'$ ) a lo largo de un meridiano, o 1852 m. El simbolo internacional es **M**, aunque tambien se usa comunmente **mn** por milla nautica, o **nm** en ingles.

con una **incertidumbre** dada de antemano, que sea suficiente para nuestros propósitos. Normalmente, una posición calculada dentro de un radio de cinco millas náuticas de la posición real se considera buena precisión, y por debajo de quince millas náuticas, es aceptable. Si es posible, queremos calcular simultáneamente la posición y la máxima incertidumbre. La incertidumbre es lo que en realidad determina la seguridad de la posición; un observador que se encuentra a una distancia de un peligro menor que la incertidumbre en su posición tiene motivos para alarmarse. Una distancia mayor significa seguridad.<sup>21</sup>

Es conveniente elaborar mejor los métodos que vamos a usar con el fin de (i) mejorar la precisión de los cálculos, (ii) extraer valores de incertidumbres asociadas con una posición calculada, y (iii) generalizar los procedimientos para no depender de condiciones particulares como la observación de la Polar o del tránsito meridiano del Sol. P.ej., la posición de la estrella Polar se desvía de la dirección del N aproximadamente  $1^\circ$ . Suponiendo que seamos capaces de medir la altura de la Polar con buena precisión, podríamos cometer un error de  $1^\circ$  al determinar la latitud, es decir 60 mn, simplemente por asumir una posición que no es exactamente la de la estrella, y tiene un error significativo. En la Sección 6.2.2 explicaremos cómo repetir este cálculo sencillo incorporando los detalles de la posición de la Polar, de tal manera que podamos obtener la posición con una precisión aceptable. El Sol, por su parte, no se mueve a una velocidad constante a lo largo del año porque no se mueve sobre un círculo, sino sobre una elipse. Por lo tanto no cruza el meridiano de Greenwich exactamente a las  $12^h$  todos los días, sino que se puede adelantar o retrasar aproximadamente  $\pm 15^m$ , como veremos más adelante. Puesto que el Sol avanza  $15^\circ$  en una hora, en un cuarto de hora avanza aproximadamente  $\frac{15^\circ}{4} \approx 4^\circ$  en su longitud, es decir un error en el tiempo de  $15^m$  podría producir un error en la posición de  $4^\circ \times 60' = 240$  mn sobre el círculo del Ecuador. Para reducir este error a valores aceptables solo es necesario conocer la hora real a la que el Sol cruza el meridiano de Greenwich en una fecha determinada, que se puede obtener del Almanaque Náutico. Por curiosidad, y porque puede resultar útil, estudiaremos cómo cambia la hora real a la que el Sol cruza el meridiano en función de la fecha; una ecuación muy sencilla (Ecuación 3.9, Sección 3.8) nos puede dar este dato con una imprecisión de  $\approx 1^m$ , que es suficiente para algunos de nuestros propósitos.

Más allá de la necesidad de tener un buen dato sobre la posición del Sol en un día concreto, o de poder calcular cómo influye una pequeña desviación de la Polar respecto del eje de los polos, estos dos ejemplos nos

---

<sup>21</sup> Más adelante discutiremos brevemente la naturaleza estadística del valor de la incertidumbre, y la probabilidad asociada con distancias múltiples del error probable en la posición.

han enseñado dos conceptos útiles y simples: la longitud está relacionada con la hora y la latitud con la altura de las estrellas. Para precisar mejor el significado de estas *relaciones* vamos a introducir los conceptos de Horario y Declinación en el Capítulo 3, y a continuación vamos a estudiar el triángulo de posición en el Capítulo 4.

Un problema más **fundamental** para la navegación real es que estos dos métodos para medir la longitud y la latitud dependen de nuestra capacidad para observar la estrella Polar alrededor del amanecer o del atardecer (las horas en que podemos ver el horizonte, y por lo tanto medir la altura de una estrella respecto del horizonte), y de observar el Sol cuando cruza exactamente la meridiana. Estas son horas y **condiciones muy específicas** que podrían no ser factibles por varias razones, siendo la meteorología la más obvia. Es deseable aumentar las posibilidades de obtener datos extendiendo el número de astros útiles, y las horas a las que podemos realizar una medida. También queremos aprender a usar observaciones de varios astros para poder calcular el posible error de la posición que obtenemos. Para conseguir estos objetivos necesitamos desarrollar un poco más las herramientas a nuestro alcance, e incorporar nuevas ideas.

## 1.7. Organización e Itinerarios.

El texto se ha organizado tratando de cubrir tres niveles de complejidad diferente, y por lo tanto admite varios itinerarios dependiendo de los intereses y los conocimientos previos del lector. La organización del material es como sigue:

En el Capítulo 1 se ha introducido el enfoque general del texto y se ha tratado de justificar el interés y la motivación para comprender las técnicas de navegación astronómica en la era del GPS, los computadores e internet. Describe las matemáticas básicas necesarias para seguir este texto, de forma que el lector pueda determinar de antemano si posee los conocimientos necesarios para seguir leyendo; o no. Finalmente, introduce *en un par de minutos* los conceptos básicos necesarios para entender cómo obtener la latitud y la longitud de un punto sobre la superficie Terrestre usando observaciones de cuerpos celestes.

El Capítulo 2 describe una serie de conceptos básicos relacionados con la Geometría de la Esfera que es importantísimo entender: latitud y longitud, ángulos polares y ecuatoriales, Horarios y Declinación, etc. Estos conceptos se introducen de forma ordenada, atendiendo a requerimientos físicos (la rotación de la Tierra sobre su eje) y a requerimientos puramente geométricos. Se incorporan los conceptos básicos de acimut y altura de un astro sobre el horizonte, o el ángulo complementario que es la altura respecto de la dirección vertical del zenit. El acimut y la altura son los

datos que se obtienen midiendo angulos, y es fundamental entender su significado y como se llega a ellos. Finalmente se describe el triangulo de posicion, que es el elemento clave en el tema del posicionamiento geografico por medio de los astros en el cielo. Usando las propiedades de este triangulo se pueden resolver todos los problemas que nos interesan.

El Capitulo 3 introduce dos conceptos fundamentales para nuestro objetivo: la latitud y la longitud de un astro, como se comportan y como se puede obtener esta informacion valiendose de un reloj que lleve la hora universal y unas tablas de datos astronomicos, o algunas expresiones sencillas.

El Capitulo 4 explica como resolver el problema matematico basico: sobre un triangulo esferico en el que se ha recogido datos para tres de sus elementos se pueden obtener todos los demas usando un par de ecuaciones simples.<sup>22</sup> Este capitulo se divide en tres secciones que cubren tres problemas de interes en el trabajo de posicionamiento geografico. En la Seccion 4.1 se explica como identificar un astro a partir de medidas de su altura respecto del horizonte y su acimut. En la Seccion 4.2 se aborda el problema inverso, como predecir la altura y acimut de un astro determinado. Este procedimiento es util no solo para tener una idea de hacia donde hay que mirar para observar un astro, es tambien fundamental para calcular una recta de altura, que como veremos en el Capitulo 5 nos proporciona el mejor metodo para realizar trabajos de posicionamiento geografico. Los procedimientos de estas dos secciones es lo unico que se necesita saber, pero en la Seccion 4.3 explicamos como obtener de forma directa la posicion a partir de una medida de altura y acimut de **un** unico astro. Inmediatamente, se explica porque esta solucion directa no es interesante, y por lo tanto porqué es necesario considerar otros metodos.

El Capitulo 5 introduce de forma concisa el metodo de rectas de altura. El Capitulo 8 completa este material explicando las ventajas de usar varias rectas de altura, y como obtener una estimacion de la **incertidumbre** en la posicion. En este capitulo se explica como se puede aplicar este metodo de forma numerica, sin recurrir a dibujar en una carta. El uso de estos metodos de forma algoritmica facilita su uso de manera iterativa, p.ej. via elementos electronicos programables, y es la manera mas rapida y precisa de obtener la posicion geografica usando rectas de altura. El autor proporciona los algoritmos codificados en el lenguaje de programacion FORTRAN a los lectores interesados. Estos dos capitulos son probablemente los mas fundamentales del texto. Este metodo fue ideado por el capitan Thomas Sumner, y elaborado posteriormente por el capitan Marq Saint Hilaire.[Sumner(1843), Saint Hilaire(1873), Saint Hilaire(1875)] Esta basado en la interseccion de rectas de altura constante, o rectas de posicion,

---

<sup>22</sup> Seccion 2.5, Ecuacion (2.13).



usando varios astros diferentes o un mismo astro medido en diferentes momentos. El libro original de Sumner, y los artículos de Saint Hilaire, se pueden encontrar reimpresos y explicados usando un lenguaje moderno en [Vanvaerenbergh and Iffland(2003)]. Las ventajas de este método son varias:

- Usa datos que se pueden medir con gran precisión, y por lo tanto permite una determinación más precisa de la posición,
- Apenas depende de la posición inicial estimada, y por lo tanto se puede usar aunque el conocimiento de la posición real sea malo,
- Permite estimar la incertidumbre en la posición calculada,
- Permite usar avistamientos de varios astros en el mismo momento, o de un astro en momentos diferentes, es decir, permite adaptarse a una situación de cielo nublado que solo da sectores visibles de astros limitados.

El Capítulo 6 trata de condiciones particulares que permiten resolver el problema de una forma realmente muy sencilla. Algunas de estas condiciones particulares, p.ej. el tránsito meridiano, o el uso de estrellas circumpolares, son muy populares y es muy útil familiarizarse con la forma de resolver estos problemas, y con los fundamentos matemáticos que nos proporcionan estas soluciones.

El Capítulo 7 explica las correcciones que se pueden y se deben hacer a las medidas de la altura de un astro, con el objetivo de eliminar una serie de errores sistemáticos que sabemos que afectan a estas medidas. Es el caso de la refracción en la atmósfera, o del alejamiento aparente del horizonte por la altura del observador. También es el caso de las correcciones de paralaje y tamaño de algunos astros.

Finalmente se han incluido una serie de Apendices para completar algunos aspectos de los temas tratados en el texto. Son totalmente prescindibles en la discusión del asunto central del posicionamiento usando datos astronómicos. Sin embargo, pueden ayudar a comprender aspectos individuales del problema, cuyo conocimiento puede facilitar enormemente encontrar soluciones. La complejidad de los Apendices es muy dispar. Por una parte se introducen conceptos muy básicos, como la noción de ángulo, o que son las funciones trigonométricas. Parece oportuno aprovechar la oportunidad para refrescar estos conceptos, aunque sea mínimamente. Es posible hacerse la pregunta de si cabe trabajar continuamente con ángulos y no tener en la mente como se definen en términos matemáticos, o no recordar la existencia de sistemas para medirlos que quizás no vayamos a usar, pero que tienen aplicación en otros contextos. Otros apéndices suponen un conocimiento casi universitario de cálculo

diferencial e integral. Este tipo de material mas difícil se ha marcado con tres estrellas (\*\*\*). Solo es adecuado para quienes lo puedan seguir con soltura, o los que deseen profundizar en esos temas. Se trata de material util, pero no estrictamente necesario, y su omision no supone perdida de continuidad en el tema central.

El Apendice A (Glosario de Terminos) proporciona una serie de definiciones precisas pero concisas de algunos terminos que son fundamentales para seguir con comodidad el texto.

El Apendice B es un repaso breve de las matemáticas necesarias para seguir con comodidad el texto. Las secciones en este apéndice tienen un nivel equivalente a un curso de matemáticas de Bachillerato o de Formación Profesional, y forman parte de los programas de estas enseñanzas, quizás con la excepción de la sección sobre triángulos esféricos.

El Apendice C profundiza en el concepto de una representación plana de la superficie esférica que conserve los ángulos (conforme), y que por lo tanto sea útil para navegar. Históricamente Gerardo Mercator fue el primero en entender como conseguir esta representación, y aunque no es necesaria para el trabajo de posicionamiento geográfico que nos ocupa es interesante conocer como se hace, y que significa.

La solución del problema de posicionamiento geografico requiere dos clases diferentes de **datos**: los que se obtienen del almanaque nautico y los que se miden con un sextante. El Apendice D describe brevemente como usar un almanaque de forma tal que el lector interesado pueda comenzar a usarlo rapidamente.

A lo largo del texto aparecen conceptos o técnicas de carácter general que son útiles para desarrollar el trabajo que nos ocupa con mas facilidad o eficiencia, aunque no tengan una relación directa con el problema central. Las ideas mas importantes se han descrito brevemente en el Apendice E, con la intención de permitir al lector interesado refrescar estos conceptos. Las secciones mas avanzadas, como la determinación por mínimos cuadrados de la mejor posición respecto de varias rectas o la teoría de la propagación de errores, constituyen material avanzado que no es imprescindible para seguir el texto y solo se incluye para el lector interesado.

El Apendice F situa estos metodos en un contexto historico y describe someramente cuando y donde se desarrollaron. La historia de estas tecnicas es fascinante y permite entender mejor algunos de los conceptos que se desea usar. Por otra parte, algunas ideas fundamentales fueron desarrolladas por matematicos arabes trabajando en la Peninsula Iberica y mas tarde por marinos y matematicos portugueses o españoles, en un periodo en que ambas naciones estaban embarcadas en grandes proyectos Geograficos para los cuales la navegacion astronomica era una tecnica fundamental. Ademas, el estudio del movimiento de los astros en el cielo

y el desarrollo de la mecánica celeste para comprender estos movimientos jugó un papel fundamental en la introducción del Método Científico y el desarrollo de una Ciencia moderna y fuerte. El Método Científico de razonar ha generado el período de mayor desarrollo económico y social en la historia de la humanidad, con logros como el acceso a fuentes de energías baratas, la aparición de medicamentos eficaces, productos químicos que han revolucionado la agricultura, la metalurgia, la aparición de productos sintéticos, materiales de construcción, ropa, el desarrollo de las comunicaciones, la mejor comprensión de la organización y evolución del Universo, etc. Es por lo tanto interesante entender como se ha iniciado este proceso desde un punto de vista histórico.

## Itinerarios.

El texto se puede recorrer por distintos itinerarios que dependen mucho de los intereses y de la formación del lector. También se puede usar de forma iterativa, cubriendo en un primer paso el material más esencial y repasando y completando los conceptos más adelante.

El nivel más **básico** incluye el Capítulo 2 completo (el entendimiento de los elementos geométricos es esencial), el Capítulo 3 (Secciones ?? a 3.4, es importante comprender el significado del Horario Local y la Declinación), el Capítulo 4 (Secciones 4.2 y 4.1, lógicamente se debe aprender primero como reconocer un astro para poder usarlo, pero desde el punto de vista operativo este es el orden de importancia). Con esto se puede llegar al Capítulo 5, que es la parte fundamental del texto. Finalmente, por su sencillez conceptual y operativa, y su importancia práctica, se puede terminar cubriendo la Sección 6.1. Dependiendo del lector, este programa se podría completar en algunas horas, o quizás en algunos días.

En un nivel **intermedio** se podrían cubrir todas las secciones que se hayan saltado hasta ese punto, completando el texto hasta el final del Capítulo 7. Este último tema es conceptualmente sencillo y tiene una gran importancia práctica. Aunque su aplicación puede llegar a ser pesada y aburrida se trata de un material imprescindible en el trabajo de posicionamiento en la mar. Si el lector no cuenta con un conocimiento de matemáticas superiores sería conveniente saltar las secciones 4.4 y 6.3 en esta segunda pasada. Esta parte podría requerir un par de días, especialmente para completar los ejercicios propuestos u otros de similar naturaleza.

Un nivel **avanzado** incluye el Capítulo 8 y las Secciones que se han evitado previamente. Es adecuado para alguien que se sienta cómodo con las matemáticas que se usan en esas partes del texto y que pueda estar interesado en profundizar en los temas y *entender* mejor el proceso

detras del metodo de Rectas de Altura, y sobre todo como calcular la incertidumbre en la posicion asi determinada. Este programa podria ocupar unos dias.

Un lector interesado en dominar rapidamente la tecnica de posicionamiento geografico por Rectas de Altura, y quizas algun caso particular simple como el Astro en la Meridiana, y que este familiarizado con los conceptos de latitud y longitud, posicion geografica, Horario y Declinacion, etc, y que sepa como obtener datos del Almanaque Nautico usando la fecha y la hora, podria ir directamente a la Seccion 4.2, y a continuacion revisar la operativa del Capitulo 5, terminando con el Capitulo 6. Este tipo de lector podria cubrir su objetivo en unas pocas horas.

Atendiendo a la dificultad de cada seccion se ha señalado el material mas avanzado, y por lo tanto mas dificil con tres estrellas (\*\*\*), y el material con una dificultad media con dos estrellas (\*\*). En una primera lectura se puede prescindir de estas secciones sin perdida de continuidad, aunque quizas intentar cubrir rapidamente las secciones con dos estrellas merezca la pena a pesar del esfuerzo necesario. Naturalmente, el lector que se sienta intimidado por estas partes puede perfectamente evitarlas, puesto que no son esenciales. El resto del material ocupa un lugar logico dentro del texto, y se debe cubrir secuencialmente incluyendo la realizacion de los ejemplos por uno mismo. Las secciones mas importantes se han señalado con el simbolo del Sol (☉). Tres soles implican un material mas esencial que dos, o uno.

El texto, incluyendo los apendices, se ha diseñado para que sea autocontenido, y se pueda usar independientemente de otras fuentes, pero se ha procurado incluir referencias pertinentes en todos los temas, de forma que el lector pueda profundizar en otros textos, o simplemente comparar la forma de tratar un tema determinado con otros autores.

Finalmente, se ha hecho un esfuerzo para escribir en correcto **castellano**, siguiendo la mayor parte del tiempo las normas de la Real Academia Española de la Lengua. Sin embargo, deliberadamente se han suprimido, por innecesarios, los **acentos** de muchas palabras que el lector identifica inmediatamente de forma clara y univoca incluso sin la tilde correspondiente. Por ejemplo, se usaria la tilde en *tomó*, para distinguirla de *tomo*, pero no se usaria en *confusion* porque el autor no conoce una palabra similar con la que se pueda equivocar por la falta de la tilde.

El lenguaje deberia ser un instrumento de comunicacion, es decir claro y univoco, pero tambien conciso, economico y sencillo. El abuso del uso de los acentos significa una carga excesiva sobre el que escribe, que se preocupa en primer lugar de que lo escrito sea claro, preciso y correcto. La eleccion que se ha hecho implica un cierto grado de arbitrariedad, pero es de esperar que no induzca confusion. El documento se ha escrito

y organizado usando L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.<sup>23</sup>

---

<sup>23</sup> L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X es un sistema de procesamiento de texto muy flexible y muy eficaz, que no facilita excesivamente la inclusión de acentos, de ahí que solo se haya realizado un esfuerzo mediano para incluir los más necesarios.



---

# Navegando con las Estrellas

---

Con el fin de simplificar el trabajo de posicionamiento geográfico a través de la observación de los astros se introduce la posición geográfica del observador y del astro sobre una esfera común, la esfera terrestre.

El problema se reduce a resolver un triángulo esférico en el que se conocen tres datos y se buscan los demás elementos. Una única ecuación, la ley de los cosenos, es suficiente para realizar la tarea, aunque se introducen otras herramientas para los lectores interesados.



El tema central del texto es el método de Rectas de Altura, pero también se discute el posicionamiento mediante el tránsito meridiano, el uso de estrellas circumpolares, y los crepúsculos.

En una serie de apéndices se han discutido una serie de temas heterogéneos que pueden atraer a los lectores interesados: la carta Mercator, el horario de los planetas, o una aproximación sucinta a la historia del concepto de la Tierra como una esfera.

Pedro de Andrés estudió la enseñanza Primaria en la Escuela Unitaria de la Estación del Espinar (Segovia) y el Bachillerato en el Instituto de Enseñanza Media *Mio Cid* de Valencia, donde aprendió la mayoría de las cosas que ha necesitado para desarrollar este texto. Mas tarde completó su formación con una licenciatura y una tesis doctoral en Física por la Universidad Autónoma de Madrid.



Ha sido profesor Ayudante y mas tarde profesor Honorario en la Universidad Autónoma de Madrid, y ha trabajado periodos extendidos en el Imperial College de Londres, la Universidad de California en Berkeley, y la Universidad de Cambridge. En periodos mas cortos ha visitado las Universidades de Erlangen (Alemania), Graz (Austria), Praga (República Checa), y el Donostia International Physics Center (España). En los últimos treinta y tantos años se ha dedicado profesionalmente a la investigación en el Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

---